

2024

## MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-1 and DSE-A-2

*Candidates are required to give their answers in their own words  
as far as practicable.*

Paper : DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর  $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$  গতির নিয়মে চলে, যেখানে  $S$  হল সরণ এবং  $t$  হল সময়। তবে কণাটির ত্বরণ নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সরল ভেদে থাকবে?

(অ)  $\frac{1}{S^3}$

(আ)  $\frac{1}{S^2}$

(ই)  $S^2$

(ঈ)  $\frac{1}{S}$

(খ) সরল দোলগতিতে চলমান কোনো বস্তুকণার সমীকরণ  $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$  হলে, দোলনের পর্যায়কাল হবে

(অ) ৯ একক

(আ) ৬ একক

(ই) ৩ একক

(ঈ) ১২ একক।

(গ) একটি চলমান বস্তুকণার অরীয় বেগের মান কণাটির বেগের অভিলম্ব উপাংশের সঙ্গে সমানুপাতিক। বস্তুটির চলমান পথের সমীকরণ হবে

(অ)  $r = Ae^{-\theta}$

(আ)  $r = \frac{A}{\theta}$

(ই)  $r = A\theta$

(ঈ)  $r = Ae^{\theta}$  ( $A$  একটি ধ্রুবক)।

(ঘ) গতিবেগ  $v$ -এর একটি অপেক্ষক যদি সময়  $t$  হয়, তবে ত্বরণ  $f$ -এর হ্রাসের হার হবে

(অ)  $f^3 \frac{d^2 t}{dv^2}$

(আ)  $f^3 \frac{d^3 t}{dv^3}$

(ই)  $f^2 \frac{d^3 t}{dv^3}$

(ঈ)  $\frac{d^2 t}{dv^2}$

Please Turn Over

(0544+0761)

(ঙ) 2 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তুকে 5 মিটার উচ্চতায় তুলতে কার্যের পরিমাণ হল

(অ) 49 জুল

(আ) 98 জুল

(ই) 147 জুল

(ঈ) 196 জুল।

(চ) যদি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোনো গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি শঙ্কুচ্ছেদ  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  হয়, তবে বল সরল ভেদে থাকবে

(অ)  $\frac{1}{r}$

(আ)  $\frac{1}{r^2}$

(ই)  $\frac{1}{r^3}$

(ঈ)  $r^2$  এর সঙ্গে।

(ছ) যদি  $I$  ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ  $u$  থেকে  $v$  তে পরিবর্তিত হয়, তবে গতিশক্তির পরিবর্তনের মান হবে

(অ)  $\frac{1}{2}I(u+v)$

(আ)  $\frac{1}{2}I(u-v)$

(ই)  $2I(u+v)$

(ঈ)  $2I(u-v)$ ।

(জ)  $m$  ওজনের একটি গোলা,  $M$  ওজনের একটি বন্দুক থেকে ছোঁড়া হলে  $E$  গতিশক্তি উৎপন্ন হয়। তাহলে গোলাটির প্রারম্ভিক বেগ হবে

(অ)  $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$

(আ)  $\sqrt{\frac{2E}{m+M}}$

(ই)  $\sqrt{\frac{2E}{M.m}}$

(ঈ)  $\sqrt{\frac{2mE}{m+M}}$ ।

(ঝ)  $m_1$  ও  $m_2$  ভরের দুটি বস্তুকণা ( $m_1 \neq m_2$ ) একটি হালকা অপ্রসারিত তার দ্বারা একটি মসৃণ স্থির পুলির সাথে যুক্ত আছে। তাহলে তারটির টান  $T$ -এর মান হবে

(অ)  $T = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} g$

(আ)  $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

(ই)  $T = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

(ঈ)  $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} g$ ।

(ঞ) ক্ষমতার মাত্রা =

(অ)  $ML^2T^2$

(আ)  $ML^2T^{-2}$

(ই)  $ML^2T^{-3}$

(ঈ)  $ML^2T^3$ ।

২। যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×১

(ক) কোনো বস্তুকণা  $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$  অধিবৃত্ত পথে এমনভাবে গতিশীল যে কণাটির গতির অভিলম্ব উপাংশ ধ্রুবক। তাহলে দেখাও

যে  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  ধ্রুবক হবে।

(খ) প্রমাণ করো যে, কেন্দ্রীয় বল  $F$ -এর অধীনে গতিশীল কোনো বস্তুকণার অবকল সমীকরণ হবে  $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2 u^2}$   
(ব্যবহৃত চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে)।

৩। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) একটি বস্তুকণা  $\mu(\text{দূরত্ব})^{-2}$  আকর্ষক বলের অধীনে (প্রতি একক ভরে) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অভিমুখে সরলরেখায় গতিশীল। যদি ওই কণাটির প্রারম্ভিক দূরত্ব ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে  $2a$  হয় তবে দেখাও যে কণাটির দূরত্ব ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে  $a$

হবে  $\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$  সময় পরে।

১০

(খ) সরলরেখা বরাবর একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার পথের কেন্দ্র থেকে  $x_1, x_2$  এবং  $x_3$  দূরত্বে গতিবেগ যথাক্রমে  $v_1, v_2$  এবং  $v_3$ । দেখাও যে  $x_1^2(v_2^2 - v_3^2) + x_2^2(v_3^2 - v_1^2) + x_3^2(v_1^2 - v_2^2) = 0$ ।

১০

(গ) সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের কার্যের হার ধ্রুবক এবং  $x$  দূরত্ব অতিক্রম করতে বলটি কণার গতিবেগকে  $u$  থেকে  $v$ -তে পরিবর্তিত করে। প্রমাণ করো যে ওই দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির  $\frac{3(u+v)x}{2(u^2 + uv + v^2)}$  সময়

লাগবে।

১০

(ঘ)  $y$  অক্ষের সমান্তরাল কোনো বলের প্রভাবে গতিশীল কোনো বস্তুকণার গতিপথ যদি  $xy = c^2$  বক্রটি হয় ( $c$  একটি ধ্রুবক) তবে বলের সূত্রটি নির্ণয় করো।

১০

(ঙ) সমতলে চলমান একটি বস্তুকণার বেগ ও ত্বরণের অরীয় এবং অভিলম্ব উপাংশ নির্ণয় করো (radial and cross-radial components)।

১০

(চ)  $m$  ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণাকে প্রারম্ভিক বেগ  $\lambda V$  সহযোগে অভিকর্ষজ বলের অধীনে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করা হল। বস্তুকণাটির উপর ক্রিয়াশীল বাধার (Resistance) পরিমাপ  $mk$  (গতিবেগ) [ $mk$  times velocity]। যদি কণাটির প্রারম্ভিক

গতিবেগ  $V$  হয় তবে দেখাও যে বস্তুটির গতিপথের সর্বাধিক উচ্চতা হল  $\frac{V^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$ ।

১০

Please Turn Over

(0544+0761)

(ছ) (অ) ঘাত ও ঘাতবল বলতে কী বোঝো?

(আ) একটি বস্তুকণা  $\frac{\mu}{(দূরত্ব)^2}$  কেন্দ্রীয় ত্বরণে গতিশীল এবং কণাটি  $R$  দূরত্ব থেকে  $V$  গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত। দেখাও যে কণাটি

$$\text{সমপরাবৃত্তে গতিশীল হবে যেখানে উৎক্ষেপণ কোণটি হবে, } \sin^{-1} \left[ \frac{\mu}{\left\{ VR(V^2 - 2\mu R)^{\frac{1}{2}} \right\}} \right] \quad ২+৮$$

(জ) একটি বস্তুকণা  $S = c \tan \psi$  ক্যাটিনারি বক্রপথে গতিশীল। বস্তুকণাটির গতিপথের যে-কোনো বিন্দুতে কণাটির ত্বরণের অভিমুখ বিন্দুটিতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সাথে সমপরিমাণ কোণে আনত। যদি শীর্ষবিন্দুতে ( $\psi = 0$ ) বস্তুকণাটির গতিবেগ  $u$  হয়, তবে দেখাও যে বস্তুটির যে-কোনো বিন্দু ' $\psi$ '-তে গতিবেগ ও ত্বরণের মান হবে যথাক্রমে  $ue^{\psi}$  এবং  $\frac{\sqrt{2}}{c} u^2 e^{2\psi} \cos^2 \psi$ ।

১০

### [English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Choose the correct alternative :

1×10

(a) A particle moves along a straight line according to the law  $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$ , where  $S$  is the displacement and  $t$  is the time. Then its acceleration varies as

(i)  $\frac{1}{S^3}$

(ii)  $\frac{1}{S^2}$

(iii)  $S^2$

(iv)  $\frac{1}{S}$

(b) For a Simple Harmonic Motion  $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ , the time period is

(i) 9 unit

(ii) 6 unit

(iii) 3 unit

(iv) 12 unit.

- (c) If the radial and cross-radial components of velocity of a moving particle be proportional then the path of the particle is

(i)  $r = Ae^{-\theta}$

(ii)  $r = \frac{A}{\theta}$

(iii)  $r = A\theta$

(iv)  $r = Ae^{\theta}$  ( $A$  is a constant).

- (d) If  $t$  be regarded as a function of velocity  $v$ , then the rate of decrease of acceleration  $f$  is

(i)  $f^3 \frac{d^2 t}{dv^2}$

(ii)  $f^3 \frac{d^3 t}{dv^3}$

(iii)  $f^2 \frac{d^3 t}{dv^3}$

(iv)  $\frac{d^2 t}{dv^2}$ .

- (e) The work done in raising a mass of 2 kg to a height of 5 meter is

(i) 49 joules

(ii) 98 joules

(iii) 147 joules.

(iv) 196 joules.

- (f) If the central orbit described by a particle moving under central force is the conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ , then the force varies as

(i)  $\frac{1}{r}$

(ii)  $\frac{1}{r^2}$

(iii)  $\frac{1}{r^3}$

(iv)  $r^2$ .

- (g) For a rectilinear motion of a particle, if an impulse  $I$  changes its velocity from  $u$  to  $v$ , then the change in Kinetic energy is

(i)  $\frac{1}{2} I(u+v)$

(ii)  $\frac{1}{2} I(u-v)$

(iii)  $2I(u+v)$

(iv)  $2I(u-v)$ .

- (h) A shell of mass  $m$  is fired from a gun of mass  $M$  which generates Kinetic energy  $E$ . Then the initial velocity of the shell is equal to

(i)  $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$

(ii)  $\sqrt{\frac{2E}{m+M}}$

(iii)  $\sqrt{\frac{2E}{M.m}}$

(iv)  $\sqrt{\frac{2mE}{m+M}}$ .

Please Turn Over

(0544+0761)

- (i) Two unequal masses  $m_1$  and  $m_2$  are connected by a light inextensible string passing over a smooth fixed pulley. The tension  $T$  of the string is

$$(i) \quad T = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} g$$

$$(ii) \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$(iii) \quad T = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$(iv) \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} g$$

- (j) The dimension of Power is

$$(i) \quad ML^2T^2$$

$$(ii) \quad ML^2T^{-2}$$

$$(iii) \quad ML^2T^{-3}$$

$$(iv) \quad ML^2T^3$$

2. Answer **any one** question :

5×1

- (a) A particle describes a parabola,  $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$  such that the cross-radial component of the velocity

is constant. Show that  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  is constant.

- (b) Prove that the differential equation of the path of a particle moving under a central force  $F$  is given

by  $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2 u^2}$  (The symbols used have their usual meaning).

3. Answer **any five** questions :

- (a) A particle moves from rest in a straight line under an attractive force  $\mu(\text{distance})^{-2}$  per unit mass to a fixed point on the line. Show that if the initial distance from the centre of force be ' $2a$ ', then

the distance of the particle will be ' $a$ ' after a time  $\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ . 10

- (b) A particle performing a simple harmonic motion in a straight line has velocities  $v_1, v_2, v_3$  respectively at distances  $x_1, x_2, x_3$  from the centre of the path.

Prove that  $x_1^2(v_2^2 - v_3^2) + x_2^2(v_3^2 - v_1^2) + x_3^2(v_1^2 - v_2^2) = 0$ . 10

- (c) A particle moving in a straight line is acted on by a force which works at a constant rate and changes its velocity from  $u$  to  $v$  in passing over a distance  $x$ .

Prove that the time taken is  $\frac{3(u+v)x}{2(u^2 + uv + v^2)}$ . 10

- (d) Find the law of force parallel to the axis of  $y$  under which a particle describes the plane curve  $xy = c^2$ , where  $c$  is a constant. 10
- (e) Find the radial and cross-radial components of velocity and acceleration of a particle moving in a plane. 10
- (f) A particle of mass  $m$  is projected vertically under gravity, the resistance of air being  $mk$  times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is  $\frac{V^2}{g}[\lambda - \log(1 + \lambda)]$ , where  $V$  is the terminal velocity of the particle and  $\lambda V$  is its initial vertical velocity. 10
- (g) (i) What do you mean by impulse and impulsive force?

- (ii) A particle moves with a central acceleration  $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$  and it is projected with a velocity  $V$  at a distance  $R$ . Show that its path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is

$$\sin^{-1} \left[ \frac{\mu}{\left\{ VR(V^2 - 2\mu R)^{\frac{1}{2}} \right\}} \right]. \quad 2+8$$

- (h) A particle moves in a catenary  $S = c \tan \psi$ , the direction of its acceleration at any point makes equal angles with the tangent and normal to the path at the point. If the speed at the vertex ( $\psi = 0$ ) be  $u$ , then show that the velocity and acceleration at any other point  $\psi$  are  $ue^\psi$  and  $\frac{\sqrt{2}}{c}u^2e^{2\psi} \cos^2 \psi$  respectively. 10

Please Turn Over

(0544+0761)

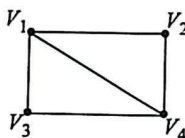
Paper : DSE-A-2

(Graph Theory)

Full Marks : 65

1. Choose the correct alternative :

- (a) In a graph, any vertex without any edge is called  
 (i) pendant vertex (ii) isolated vertex  
 (iii) end vertex (iv) null vertex.
- (b) The graph



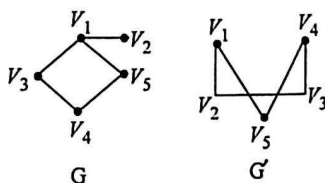
is

- (i) complete (ii) regular  
 (iii) non-null (iv) planar.
- (c) The maximum number of edges in a simple graph with 10 vertices and 3 components is  
 (i) 12 (ii) 13  
 (iii) 28 (iv) 42.
- (d) The contribution (in degree) of any loop at its vertex is  
 (i) 0 (ii) 1  
 (iii) 2 (iv) 3
- (e) Choose the correct statement :  
 (i) Bipartite graph may have odd cycle  
 (ii)  $K_3$  is the smallest non-bipartite simple graph  
 (iii) Bipartite graph must be regular  
 (iv) Bipartite graph may have self-loop.
- (f) Size of 3-regular connected graph of order 6 is  
 (i) 6 (ii) 9  
 (iii) 18 (iv) 24.

- (g)  $K_{2,4}$  is
- Eulerian, but non-Hamiltonian
  - Hamiltonian, but non-Eulerian
  - Both Eulerian and Hamiltonian
  - Neither Eulerian nor Hamiltonian.
- (h) Number of pendant vertices in a rooted binary tree with 45 vertices is
- 15
  - 16
  - 18
  - 23.
- (i) In a connected simple planar graph of order 20 with degree of each vertex being 3, number of regions is
- 8
  - 10
  - 12
  - 14.
- (j) If a graph has 12 edges, then sum of degrees of all the vertices is
- 12
  - 18
  - 20
  - 24.

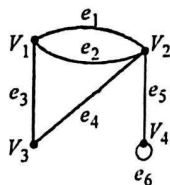
2. Answer **any three** questions :

- (a) (i) Define regular graph. Give 2 examples of 3-regular graph.  
 (ii) Draw a graph with degree sequence  $\{5, 5, 3, 3, 2, 2, 2\}$ . (1+2)+2
- (b) (i) Let  $G$  be a graph of order 16 and size 29 respectively. The degree of the vertices are 3, 4 or 5. There are 8 vertices of degree 4. How many vertices of  $G$  have degree 5?  
 (ii) Determine whether the following graphs are isomorphic or not.



3+2

- (c) Find the number of different walks of length 3 between  $V_1$  and  $V_3$  of the following graphs and indicate the walks.



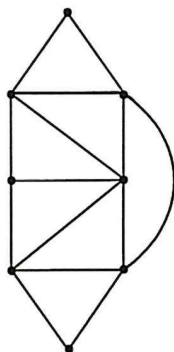
Interpret the result using adjacency matrix?

3+2

Please Turn Over

(0544+0761)

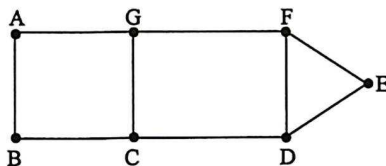
- (d) (i) Find two Non-isomorphic spanning tree of the following graph.



- (ii) Define a path. Give an example of a walk which is not a path.

3+2

- (e) In the graph

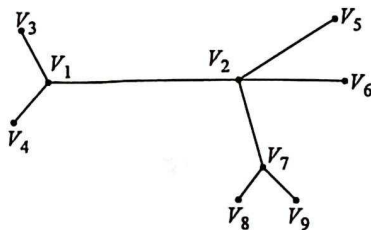


- (i) Construct all paths from B to E.  
 (ii) Find the distance between B and E.  
 (iii) Find the distance between G and D.

3+1+1

3. Answer **any four** questions :

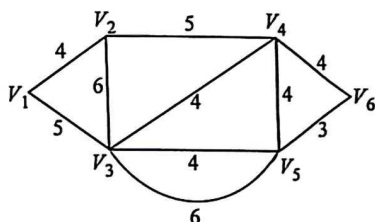
- (a) (i) Define pseudograph with an example.  
 (ii) Prove that  $G$  has a Eulerian trail if and only if  $G$  has exactly two vertices of odd degree.  
 (iii) Prove that every closed odd walk contains an odd cycle. 2+5+3  
 (b) (i) Prove that every finite tree is bipartite and verify the statement with the following graph.



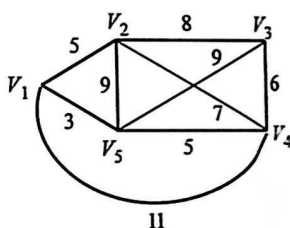
- (ii) Draw 2 self-complementary graphs with 5 vertices.  
 (iii) If  $G$  be a  $p$ -regular graph of order  $n \geq 2(p+1)$ , for  $p \geq 1$ , prove that  $\bar{G}$  is Hamiltonian. (2+2)+2+4

- (c) Apply Dijkstra's algorithm to determine a shortest path between  $V_1$  and  $V_6$ .

10



- (d) (i) Find the minimal spanning tree of the following graph :

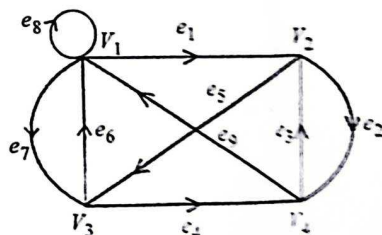


11

- (ii) If  $G$  be a simple planar graph with at least 11 vertices, then show that  $\bar{G}$  is non-planar.

5-5

- (e) (i) Construct adjacency and incidence matrix of the following digraph :



- (ii) Prove that Peterson's graph is non-planar. Does Peterson graph is Hamiltonian? Justify your answer.

4-(4-2)

- (f) (i) A medical representative has to visit four towns namely A, B, C and D. He will not visit any town twice before completing his tour to all towns. The cost matrix for going from one town to another are given below

	A	B	C	D
A	-	3	4	5
B	3	-	7	4
C	4	7	-	4
D	5	4	4	-

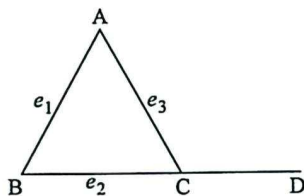
Draw the graph and find all possible roots starting from each town and hence determine the optimal root (or roots) and the minimum cost

Please Mark Your

(0244-07017)

(ii) Find the incidence and adjacency matrices for the simple graph.

7+3



(g) (i) Draw the graph from the incidence matrix

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$V_1$	1	0	0	0	-1	0
$V_2$	-1	1	0	0	0	1
$V_3$	0	-1	-1	0	0	0
$V_4$	0	0	1	1	0	-1
$V_5$	0	0	0	-1	1	0

(ii) Show that a simple connected planar graph  $G$  has a vertex of degree  $\leq 6$ .

5+5