

2024

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ ।

(খ) $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন $x = a \cos^3 t$ এবং $y = b \sin^3 t$ ।

(গ) $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$ একটি ক্ষয়িস্থ অপেক্ষক হলে 'k' এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) $y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে দেখাও যে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ ।

(ঙ) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ -এই Reduction formula ব্যবহার করে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(চ) $t \in [0, \pi]$ অন্তরালে, $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$ বক্ররেখাটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ছ) $x^2 = 36y$ অধিবৃত্ত, Y-অক্ষ এবং $y = 4$ সরলরেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

(ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো যখন $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$ ।

(খ) $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$ ।

Please Turn Over

(গ) Successive differentiation-এর উপর Leibnitz Theorem বিবৃত করো। যদি $y = e^{-x}\cos x$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে $y_4 + 4y = 0$ ।

(ঘ) $\frac{2}{x^3} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ঙ) Vectorial angle 0 থেকে θ পর্যন্ত $r = a(1+\cos\theta)$ -এই Cardioide-এর পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(চ) যদি $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$ হয়, দেখাও যে $(y_{10})_0 = 2^{10}$ ।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

৩। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২½×২

(ক) কত ডিগ্রি কোণে অক্ষগুলিকে যোরাতে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণ থেকে xy পদটিকে তাড়ানো যাবে তা নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$ শঙ্কুটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং ওর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) যে গোলকটির একটি ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু $(3, 4, -2)$ এবং $(-1, 3, 2)$ তার সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(ঘ) $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ একটি কেন্দ্রবিহীন শঙ্কুচ্ছেদ (Conic) হলে k -এর মান নির্ণয় করো।

৪। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬×৫

(ক) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$ সমীকরণটিকে তার Canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং Conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ শঙ্কুচ্ছেদটিকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$ ।

(গ) $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ বিন্দুতে $xy = c^2$ পরাবৃত্তটির অভিলম্ব যদি $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ বিন্দুগামী হয়, তাহলে দেখাও যে $t_1^3 t_2 + 1 = 0$ ।

(ঘ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সম্মারপথটি নির্ণয় করো।

(ঙ) একটি r ব্যাসার্ধের গোলক মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে যায় এবং অক্ষগুলিকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে এই PQR ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের সম্মারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(চ) শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু $(1, 1, 3)$ এবং বক্ররেখার ভিত্তি $x^2 + 2y^2 = 1, z = 4$ ।

- (ছ) যে Cylinder-এর generator গুলি $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখা $x^2 + 4y^2 = 9, z = 1$ তার সমীকরণ লেখো।
- (জ) $4x^2 - y^2 = 8z$ — এই Paraboloid-টির সেই সমস্ত generating line-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যেগুলি $(-3, 2, 4)$ বিন্দুগামী।
- (ঝ) দেখাও যে $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$ সমীকরণটি একটি Central Conicoid হয়। এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

- (ক) $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = 3\hat{i} - \hat{k}$, $\vec{\gamma} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ।
- (খ) প্রমাণ করো যে, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ।
- (গ) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লেখো যা $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ বিন্দুগামী।
- (ঘ) $8\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ এবং $4\hat{i} + b\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরগুলি সমরেখ হলে a এবং b -এর মান নির্ণয় করো।
- (ঙ) $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর একটি চলমান বস্তুর কার্য নির্ণয় করো, যেখানে প্রযুক্ত বল হল $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ।
- (চ) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার শীর্ষবিন্দুগুলি হল $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ।
- (ছ) $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t \hat{k}$ হলে $\left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|$ -এর মান নির্ণয় করো।

৬। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

- (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোগকারী রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে।
- (খ) $(-2, 6, -6)$; $(-3, 10, -9)$ এবং $(-5, 0, -6)$ বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (গ) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ এবং $\vec{\gamma}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয় না হলে দেখাও যে $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = -2[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ ।
- (ঘ) $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ এই বক্ররেখা বরাবর একটি কণা গতিশীল। তাহলে সময় যখন $t = 1$, কণার গতিবেগ ও ত্বরণের components গুলি নির্ণয় করো।

Please Turn Over

- (ঙ) $\vec{P}(4, 2, 1)$ বলটি $A(5, 2, 4)$ বিন্দুর উপর প্রয়োগ হলে $B(3, -1, 3)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে \vec{P} -এর টর্ক নির্ণয় করো এবং Magnitude নির্ণয় করো।

(চ) $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ হলে $\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ -এর মান নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer *any four* questions :

2×4

(a) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$, when $x = a \cos^3 t$ and $y = b \sin^3 t$.

(c) Find the values of k in order that $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$ is a decreasing function.

(d) If $y = (\sin^{-1}x)^2$, then show that $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$.

(e) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$ using the reduction formula, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(f) Find the arc length of the curve, $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$ over the interval $t \in [0, \pi]$.

(g) Find the area in the first quadrant included between the parabola $x^2 = 36y$, the Y-axis and the line $y = 4$.

2. Answer *any three* questions :

4×3

(a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ when $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$.

(c) State Leibnitz Theorem on successive differentiation. If $y = e^{-x} \cos x$, then prove that $y_4 + 4y = 0$.

- (d) Find the area enclosed by the curve, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
- (e) Find the length of the arc of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ from the vectorial angle 0 to θ .
- (f) If $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$, show that $(y_{10})_0 = 2^{10}$.

Group - B**[Geometry]****(Marks : 35)****3. Answer any two questions :****2½×2**

- (a) Find the angle through which the axes be turned to remove the term xy from the equation, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.
- (b) Determine the nature of the conic, $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$ and also find the length of its latus rectum.
- (c) Find the equation of the sphere whose extremities of a diameter are $(3, 4, -2)$ and $(-1, 3, 2)$.
- (d) Find the value of k for which the equation, $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ represents a conic without any centre.

4. Answer any five questions :**6×5**

- (a) Reduce the equation, $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$ to its canonical form and determine the nature of the conic.
- (b) If the straight line, $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the conic, $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then show that $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$.
- (c) If the normal to the hyperbola, $xy = c^2$ at the point $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$ meet it again at $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$, then show that $t_1^3t_2 + 1 = 0$.
- (d) Find the equation of the locus of the points of intersection of mutually perpendicular tangents to the ellipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- (e) A sphere of radius r passes through the origin $(0, 0)$ and touches the axes in P, Q, R . Find the locus of the centroid of the triangle PQR .
- (f) Find the equation of the cone with vertex $(1, 1, 3)$ and guiding curve $x^2 + 2y^2 = 1, z = 4$.

Please Turn Over

- (g) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line, $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse, $x^2 + 4y^2 = 9$, $z = 1$.
- (h) Find the equations of the generating lines of the paraboloid $4x^2 - y^2 = 8z$ passing through the point $(-3, 2, 4)$.
- (i) Show that the quadric surface given by the equation
- $$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$
- is a central conicoid. Find its centre.

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer *any four* questions :

2×4

- (a) If $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = 3\hat{i} - \hat{k}$, $\vec{\gamma} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$, find $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.
- (b) Prove that $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.
- (c) Find the vector equation of the line passing through the point, $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and parallel to the vector, $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$.
- (d) Find the values of a and b for which the vectors $8\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ and $4\hat{i} + b\hat{j} + 4\hat{k}$ are collinear.
- (e) Find the work-done in moving an object along a vector $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ if the applied force is $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$.
- (f) Find the area of the triangle having vertices at $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.
- (g) If $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t \hat{k}$, then find the value of $\left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|$.

6. Answer *any three* questions :

4×3

- (a) Show by vector method that the line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and half of its length.
- (b) Find the vector equation of a plane through the three points $(-2, 6, -6)$; $(-3, 10, -9)$ and $(-5, 0, -6)$.
- (c) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ and $\vec{\gamma}$ are three non-coplanar vectors, then show that $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = -2[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$.

(7)

B(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-I/CCF

- (d) A particle moves along the curve $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$. Find the components of velocity and acceleration at time $t = 1$.
- (e) Find the torque about the point $B(3, -1, 3)$ of a force $\vec{P}(4, 2, 1)$ passing through the point $A(5, 2, 4)$. Find the magnitude of the torque.

(f) If $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, then find $\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$.
