

2024

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-3

Full Marks : 65

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক বিকল্পটি নির্বাচন করো :

১×১০

(ক) $\int_{-a}^a |x| dx$ -এই definite integral-টির মান নিম্নের কোন্টির সাথে সমান?

(অ) a

(আ) $2a$

(ই) a^2

(ঈ) 0 .

(খ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x dx$ -এর মান হল

(অ) π

(আ) 2π

(ই) $\pi/2$

(ঈ) 0 .

(গ) সমাকল $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ অস্তিত্ব থাকবে

(অ) যখন $m > 1, n > 1$

(আ) যখন $m > -1, n > -1$

(ই) যখন $m \geq 0, n \geq 0$

(ঈ) যখন $m > 0, n > 0$.

(ঘ) Four significant figures পর্যন্ত 5.45852 সংখ্যাটির আসন্নমান হবে

(অ) 5.457

(আ) 5.459

(ই) 5.458

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঙ) যদি $f(0) = 4.76, f(1) = 5.24$ হয়, তবে Trapezoidal rule দ্বারা $\int_0^1 f(x) dx$ -এর আসন্নমান হবে

(অ) 6

(আ) 5

(ই) 3.12

(ঈ) 3.98.

Please Turn Over

(1331)

(চ) $3 - 5x - x^2 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির মধ্যে একটি থাকবে

(অ) 2 এবং 3-এর মধ্যে

(আ) 1 এবং 4-এর মধ্যে

(ই) 1 এবং 2-এর মধ্যে

(ঈ) 5 এবং 6-এর মধ্যে।

(ছ) এদের কোনটি Convex Set নয়?

(অ) $X = \{x : |x| < 4\}$

(আ) $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$

(ই) $X = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \geq 9\}$

(ঈ) $X = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

(জ) $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 7, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13$ এই system-টির basic solutions-এর সংখ্যা

(অ) 10

(আ) 12

(ই) 11

(ঈ) 9.

(ঝ) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$ সেটের চরম বিন্দুগুলি থাকবে

(অ) বৃত্তের মধ্যে

(আ) বৃত্তের উপরে

(ই) বৃত্তের বাইরে

(ঈ) ব্যাসের উপরে।

(ঞ) একটি সুখম পরিবহন সমস্যাতে m সংখ্যক উৎস এবং n সংখ্যক গন্তব্য ($m, n \geq 2$) থাকলে সঠিক সংখ্যক basic variables-এর সংখ্যা হবে

(অ) $m + n$

(আ) $m - n + 1$

(ই) $m + n - 1$

(ঈ) $m - n$.

ইউনিট - ১

(সমাকলন বিদ্যা)

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) প্রমাণ করো যে, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} [m > -1]$.

৫

(খ) দেখাও যে, $\int_0^{\infty} e^{-4x} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{128} \sqrt{\pi}$.

৫

(গ) Beta function-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করো $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$.

৫

(ঘ) যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ হয়, দেখাও যে $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{n}$ । এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

৩+২

(ঙ) Astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ -এর সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

৫

ইউনিট - ২

(সাংখ্যিক পদ্ধতি)

৩। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) (অ) যদি $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $h = 1$, Δy -এর মান নির্ণয় করো।

(আ) $\frac{7}{6}$ -এর মান 1.16 দ্বারা approximate করা হলে, percentage error নির্ণয় করো।

৩+২

(খ) Newton Forward Interpolation সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সারণি থেকে $f(0.16)$ -এর মান নির্ণয় করো : ৫

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.005	1.020	1.045	1.081

(গ) Newton-Raphson পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 + x^2 - 3 = 0$ সমীকরণটির three significant figures পর্যন্ত নির্ভুল বীজ নির্ণয় করো। ৫

(ঘ) 5টি sub-intervals নিয়ে Trapezoidal Rule দ্বারা $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ -এর মান নির্ণয় করো। Exact value-টি গণনা করো এবং relative error নির্ণয় করো। ৫

(ঙ) Bisection পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3 - x - 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে three significant figures পর্যন্ত নির্ভুল ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক বীজের মান নির্ণয় করো। ৫

(চ) সঠিক interpolation সূত্র ব্যবহার করে নিম্ন প্রদত্ত সারণী থেকে $f(0.5)$ -এর মান নির্ণয় করো : ৫

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	7	26	63	124

(ছ) $h = 1$ ধরে নিয়ে $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$ -এর মান নির্ণয় করো। ৫

ইউনিট - ৩

(রৈখিক প্রোগ্রামিং)

৪। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) দেখাও যে, Set $S = \{(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 \leq 10, x_1 - 2x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}$ একটি convex set. ৫

(খ) এক আসবাবপত্র প্রস্তুতকারক তার available resources ব্যবহার করে দুই ধরনের জিনিস, চেয়ার ও টেবিল তৈরি করার পরিকল্পনা করে। তার কাছে 4000 board ft কাঠ ও 450 man-hour আছে। একটি চেয়ার তৈরি করতে 5 board ft কাঠ এবং 10 man-hour লাগে এবং তা বিক্রি করে ₹ 40.00 লাভ হয়। একটি টেবিল তৈরি করতে 20 board ft কাঠ এবং 15 man-hour লাগে এবং তা বিক্রি করে ₹ 60.00 লাভ হয়। একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রচনা করো, যাতে তার সর্বাধিক লাভ হয়। ৫

Please Turn Over

(গ) নিম্নের প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি basic feasible solution নির্ণয় করো :

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 3,$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

(ঘ) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করো :

$$\text{চরম } Z = 3x_1 + 2x_2$$

যেখানে,

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(ঙ) নিম্নলিখিত profit matrix-টির জন্য optimal assignment এবং optimal profit নির্ণয় করো :

	A	B	C	D
I	7	8	5	6
II	5	2	3	4
III	4	6	2	1
IV	3	4	1	8

(চ) Big M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক সমস্যার সমাধান করো :

$$\text{চরম } Z = 2x_1 + 3x_2$$

যেখানে,

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(ছ) নীচের পরিবহন সমস্যাটি VAM পদ্ধতিতে সমাধান করো :

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
O ₁	2	3	11	7	6
O ₂	1	0	6	1	1
O ₃	5	8	15	9	10
	7	5	3	2	

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Choose the correct option :

1×10

(a) The value of definite integral $\int_{-a}^a |x| dx$ is equal to

- (i) a (ii) $2a$
(iii) a^2 (iv) 0 .

(b) The value of $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x dx$ is

- (i) π (ii) 2π
(iii) $\pi/2$ (iv) 0 .

(c) The integral $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ exists

- (i) when $m > 1, n > 1$ (ii) when $m > -1, n > -1$
(iii) when $m \geq 0, n \geq 0$ (iv) when $m > 0, n > 0$.

(d) Round-off of the number 5.45852 up to four significant figures is

- (i) 5.457 (ii) 5.459
(iii) 5.458 (iv) None of these.

(e) Let $f(0) = 4.76, f(1) = 5.24$ and then the Trapezoidal rule gives approximate value of

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ is}$$

- (i) 6 (ii) 5
(iii) 3.12 (iv) 3.98.

(f) One of the roots of $3 - 5x - x^2 = 0$ lies in between

- (i) 2 and 3 (ii) 1 and 4
(iii) 1 and 2 (iv) 5 and 6.

(g) Which one of the following is not a convex set?

- (i) $X = \{x : |x| < 4\}$ (ii) $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$
(iii) $X = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \geq 9\}$ (iv) $X = \{(x, y) : 3x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

Please Turn Over

(h) The number of basic solutions of the system

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 7, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 13 \text{ is}$$

(i) 10

(ii) 12

(iii) 11

(iv) 9.

(i) The extreme points of the set $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ are the points

(i) inside the circle

(ii) on the circle

(iii) outside the circle

(iv) on the diameter.

(j) In a balanced T.P. having 'm' origins and 'n' destinations ($m, n \geq 2$) the exact number of basic variables is

(i) $m + n$

(ii) $m - n + 1$

(iii) $m + n - 1$

(iv) $m - n$.

Unit - 1

(Integral Calculus)

2. Answer *any three* questions :

(a) Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} [m > -1].$ 5

(b) Show that $\int_0^{\infty} e^{-4x} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{128} \sqrt{\pi}.$ 5

(c) Using the definition of Beta function, prove that $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}.$ 5

(d) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, show that $I_{n+1} - I_{n-1} = \frac{1}{n}$. Use this relation to evaluate $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x dx.$ 3+2

(e) Find the total length of the astroid : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$ 5

Unit - 2

(Numerical Methods)

3. Answer *any four* questions :

(a) (i) If $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $h = 1$, find Δy .

(ii) Find the percentage error in approximation of $\frac{7}{6}$ by 1.16. 3+2

- (b) From the following table, find $f(0.16)$ using Newton Forward Interpolation formula : 5

x	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.005	1.020	1.045	1.081

- (c) Solve the equation $x^3 + x^2 - 3 = 0$ by Newton-Raphson method correct to three significant figures. 5
- (d) Evaluate $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ taking 5 sub-intervals by Trapezoidal Rule. Compute the exact value and find the relative error. 5
- (e) Solve $x^3 - x - 1 = 0$ to find the smallest positive root correct to three significant figures using the method of Bisection. 5
- (f) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(0.5)$ from the following data : 5

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	7	26	63	124

- (g) Taking $h = 1$, evaluate $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$. 5

Unit - 3

(Linear Programming)

4. Answer **any four** questions :

- (a) Show that the Set $S = \{(x_1, x_2) : 3x_1 + x_2 \leq 10, x_1 - 2x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}$ is a convex set. 5
- (b) A furniture manufacturer plans to make only two products— chairs and tables from his available resources. He has 4000 board ft. of wood and 450 man-hour. A chair requires 5 board ft. of wood and 10 man-hour and yields a profit of ₹ 40.00, while one table requires 20 board ft. of wood and 15 man-hour and yields a profit of ₹ 60. Pose an L.P.P. so that he can maximize his profit. 5
- (c) Find a basic feasible solution of the following system : 5

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 &= 3, \\5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4.\end{aligned}$$

- (d) Solve graphically the following LPP : 5

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to,

$$\begin{aligned}-2x_1 + x_2 &\leq 1 \\x_1 &\leq 2 \\x_1 + x_2 &\leq 3, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Please Turn Over

- (e) Find the optimal assignment and the corresponding optimal profit from the following profit matrix: 5

	A	B	C	D
I	7	8	5	6
II	5	2	3	4
III	4	6	2	1
IV	3	4	1	8

- (f) Solve by Big M method the following LPP : 5

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + 3x_2$$

subject to,

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- (g) Solve the following Transportation Problem by VAM method : 5

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	
O ₁	2	3	11	7	6
O ₂	1	0	6	1	1
O ₃	5	8	15	9	10
	7	5	3	2	